

**Dr. Mara Cotič, Lea Kozel, mag. Darjo Felda**

## Razumevanje matematičnega pojma verjetnosti pri otrocih v vrtcu in prvem razredu osnovne šole

**Povzetek:** V Kurikulumu za vrtce (1999) in v Učnem načrtu za matematiko za osnovno šolo (1999) je verjetnost kot matematična vsebina posebej izpostavljena. Z verjetnostjo razvijamo pri otroku poleg determinističnega tudi nedeterministično mišljenje, ki je nujno za razumevanje današnjega sveta. Z nekaterimi temeljnimi pojmi verjetnosti se otrok sreča že v predšolskem obdobju, zlasti v igrah na srečo. Poraja pa se vprašanje, kako se z njimi sooča in kako jih razume. Na to smo skušali odgovoriti z izvedbo raziskave v vrtcih in šolah. Predvsem nas je zanimalo, ali so razlike v reševanju nalog iz verjetnosti med otroki v predšolskem obdobju in v prvem razredu osnovne šole, zlasti pri predvidevanju naključnih dogodkov.

**Ključne besede:** vrtec, prvi razred osnovne šole, verjetnost, sprejeti negotovost, znati predvideti, mogoče, nemogoče, zagotovo.

UDK: 373.2

Pregledni znanstveni prispevek

*Dr. Mara Cotič, izr. prof. za didaktiko matematike in matematiko v izobraževanju, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, Slovenija; e-naslov: mara.cotic@guest.arnes.si*

*Lea Kozel, asistentka za didaktiko matematike, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, Slovenija; e-naslov: lea.kozel@pef.upr.si*

*Mag. Darjo Felda, viš. pred. za didaktiko matematike in matematiko v izobraževanju, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, Slovenija; e-naslov: darjo.felda@pef.upr.si*

## Uvod

Matematično vsebino verjetnost začnemo vpeljevati že v predšolskem obdobju. V Kurikulumu za vrtce (2001) in tudi v Učnem načrtu za matematiko (1999) je verjetnost kot matematična vsebina posebej izpostavljena. Prvi koraki v svet verjetnosti so pri otroku zgolj sistematično pridobivanje izkušenj z igro in različnimi dejavnostmi. Pridobljene izkušnje bodo otroku koristile v vsakdanjih življenjskih okoliščinah pa tudi v poznejših letih šolanja, ko bo spoznaval formalne vsebine verjetnosti. Področje verjetnosti je namreč s stališča poučevanja in učenja zelo zahtevno. Kljub v bistvu neoporečnemu pouku verjetnosti imajo otroci in odrasli pogosto izkrivljene predstave o verjetnosti, saj z matematičnimi dejavnostmi v vrtcu in osnovni šoli razvijamo predvsem deterministično mišljenje. Vsa področja matematike, razen verjetnosti, namreč temeljijo na determinističnem načinu mišljenja, to je na principu dvovalentne logike (narobe/prav, je res/ni res). Kot je zapisano v dokumentih Unesca: »Samo deterministično mišljenje ni več dovolj za razumevanje nekaterih znanosti; nedeterministične sheme razmišljanja so vedno bolj potrebne in prisotne, na primer v genetiki, biologiji, fiziki, ekonomiji /.../« (Unesco 1972, str. 96). Verjetnost se danes uporablja tudi na področjih, ki so blizu človekovega vsakdanjika: v meteorologiji (vremenske napovedi), pri volitvah, v zavarovalništvu ... Današnji človek živi v hitro spreminjajočem se svetu in se mora vedno pogosteje soočati z novimi in negotovimi okoliščinami. »Živimo v svetu, polnem negotovosti in nepredvidljivosti, otroka, prihodnjega odraslega, moramo pripraviti na ta svet tako, da ga bo znal kritično interpretirati in zavestno delovati v njem.« (Fischbein 1984, str. 37) Zato je treba »abecedo« verjetnosti, ki zahteva poseben način mišljenja, tuj determinističnemu načinu mišljenja, vključevati že v predšolsko obdobje in osnovno šolo. Odrasli, ki so bili deležni šolske izobrazbe zgolj z vsebinami determinističnega mišljenja, imajo velikokrat težave pri dojetanju temeljnih pojmov iz verjetnosti, saj tu dvovalentna logika odpove. Didaktika matematike E. Fischbein (1970) in M. Cotič (1999) sta izpeljala raziskavi o primernosti vpeljevanja verjetnosti že na razredno stopnjo pouka matematike in ugotovila, da učenec na razredni stopnji na intuitivni ravni dobro razume osnovne koncepte verjetnosti. V Sloveniji ni bila narejena še

nobena raziskava o razumevanju verjetnosti pri predšolskih otrocih, zato smo v tokratnem prispevku želeli raziskati, kako otroci, stari od štiri do sedem let, razumejo temeljne pojme iz verjetnosti.

### Dejavnosti iz verjetnosti v vrtcu

Vzgojitelj naj bi z otroki v vrtcu izpeljal različne dejavnosti s področja verjetnosti. Otroci:

- opišejo, kaj je zanje mogoče ali nemogoče;
- razlikujejo med gotovim, slučajnim in nemogočim dogodkom;
- pri praktičnih dejavnostih (met kocke, žreb, met kovanca) smiselno uporabljajo izraze: mogoče, nemogoče, ne vem, morda, je mogoče, ni mogoče, naključno, manj verjetno, enako verjetno, bolj verjetno itn.;
- primerjajo med seboj verjetnosti raznih dogodkov;
- pri preprostih igrah na srečo postavljajo smiselne hipoteze in jih skušajo podpreti z izkušnjami (Cotič 1999).

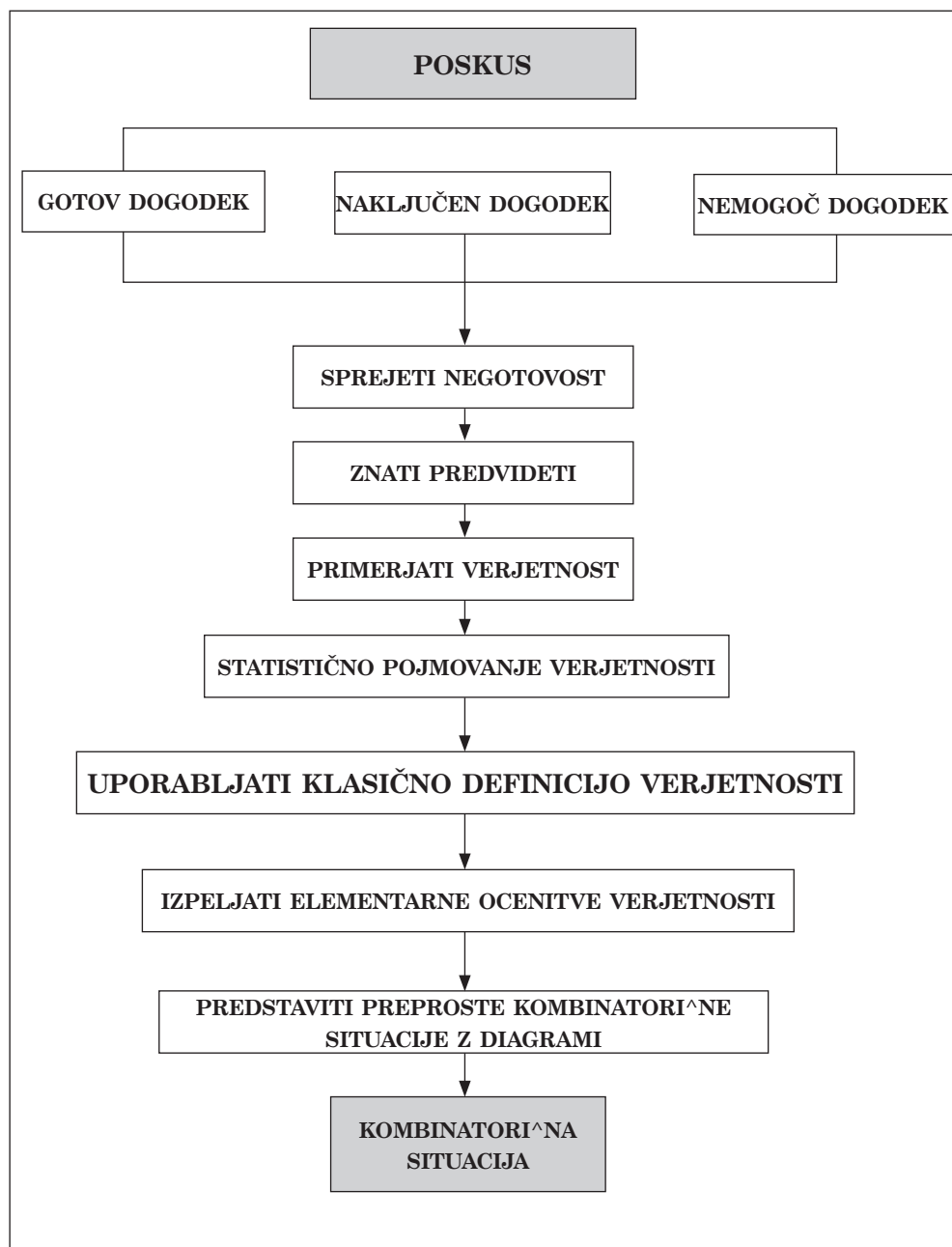
### Metodični koraki, ki vodijo do klasične definicije verjetnosti

Ni dovolj samo razložiti, zakaj mora verjetnost dobiti prostor v novih programih za poučevanje in učenje matematike. Pokazati moramo tudi, kako jo vpeljemo. Metodične korake vpeljave verjetnosti na vseh stopnjah vzgoje in izobraževanja, ki naj bi jih otrok naredil od vrtca do srednje šole, da bi v srednji šoli razumel klasično in statistično definicijo verjetnosti ter jo nato smiselno uporabljal v svojem življenju, smo izoblikovali avtorji tega prispevka in so podani v naslednji shemi.

#### *Sprejeti negotovost*

V prvem koraku v svet verjetnosti otroka vodimo, da sprejme negotove situacije brez vznemirjenja: torej h konceptu naključnega dogodka. Po Piagetovi razvojni teoriji šest- do sedemletni otrok ne le da nima jasne predstave o verjetnosti nekega dogodka, ampak tudi ne razlikuje med naključnimi in nenaključnimi dogodki, četudi jih je sam doživel. Otrok se nagiba k temu, da pripisuje namernost tudi predmetom in pojavom, ne samo ljudem. Na primer: »Sonce je na nebu zato, da me greje; morje valovi zato, da bi premikalo ladje ...« Nič se ne zgodi naključno, vse je hoteno, načrtovano, določeno. Sprejeti naključni dogodek ni torej samo kognitiven, ampak je za otroka tudi afektivni problem, saj vsako negotovost sprejme s tesnobo. Otrok naj bi se počasi začel zavedati, da neki dogodek ni nujno gotov ali nemogoč, ampak je lahko naključen. Najbolj postopno lahko to naredimo z različnimi igrami, pri katerih je pomembna »sreča« (človek ne jezi se, tombola ...)

in sposobnost znati izbrati med različnimi možnostmi tisto, ki ponuja največjo verjetnost za zmago (vrtavka, igralne karte ...).



Slika 1: Metodični koraki, ki vodijo do klasične definicije verjetnosti

### *Znati predvideti*

Pojme »gotovo«, »naključno« in »nemogoče« pri otroku najprej razvijamo z različnimi dejavnostmi, v katerih je sam udeležen. Veliko didaktikov matematike opisuje to kot subjektivno verjetnost, ki je izhodišče za poznejše razumevanje empirične in matematične verjetnosti. Otrok pri vsakdanjih dogodkih pravilno uporablja besede zagotovo, ni mogoče, nemogoče, mogoče, naključno: »Popoldne bom šel mogoče na igrišče. V nedeljo zagotovo ne grem v vrtec. Nemogoče je, da bi bil čez eno uro v Ameriki.«

Ti koncepti so tako preprosti, da je odrasel človek prepričan, da jih tudi otrok razume, vendar pri tem pozablja, da otrok največkrat nemogoče enači z narobe, mogoče pa z zagotovo in prav (Valenti 1987).

Ni dovolj, da otroku ponudimo samo take situacije, ki se zgodijo neodvisno od njega (npr. opazovanje vremena, štetje določenih znamk avtomobilov), ampak predvsem situacije, ki jih otrok obvladuje in ki dajejo možnost, da jih lahko večkrat ponovimo pod enakimi pogoji (met kocke, žreb, met kovanca ...), da bo lahko po večkratnih izkušnjah s kocko, na kateri so narisane nič, ena, dve in tri pike, ugotovil (Tenuta 1992):

- Če vržem kocko, zagotovo »pade« število, manjše od štiri.
- Nemogoče je, da vržem pet pik.
- Mogoče vržem eno piko.

Sprejeti negotovost pomeni tudi sprejeti dejstvo, da se predvideni dogodek ne zgodi. Zato je nujno z otrokom izvajati take dejavnosti, ki mu dajejo možnost, da napoveduje verjetnost dogodkov v negotovih naključjih. Svoje napovedi nato preveri ter ugotovi, da ni nujno, da se njegova napoved uresniči. Kot smo omenili, naj bi otrok sprejel izid brez razburjenja ne glede na to, ali se je zgodilo, kar je predvidel, ali ne. Povejmo primera:

**Primer 1:** V neprosojni vrečki imaš črne in rumene žogice. Kakšne barve je lahko izvlečena žogica? Katere barve žogico si izvlekel?

**Primer 2:** V vrečki je 1 rumena, 1 rdeča in 1 modra kocka. Ko izvlečeš kocko iz vrečke, je ne vrneš vanjo. Napovej, kakšne barve je lahko kocka, ko vlečeš prvič; kakšne barve ne more biti kocka, ko vlečeš drugič; in kakšne barve bo zagotovo kocka, ko vlečeš tretjič. V kakšnem vrstnem redu si izvlekel kocke?

Po Piagetu (1951) otrok v predoperativnem in celo operativno-konkretnem obdobju ni zmožen ločiti med gotovimi in naključnimi dogodki in niti formulirati napovedi, tako da bi pri tem upošteval izkušnje prejšnjih analognih situacij. Njegovi kriteriji velikokrat temeljijo na kriteriju ponavljanja (če je zadnja izvlečena kocka rdeča, bo tudi naslednja rdeča) ali na kriteriju kompenzacije (barva izvlečene kocke mora biti take barve, ki še ni bila izvlečena). To otrokovo ravnanje je determini-

rano z afektivno motivacijo, z zaupanjem v pravilnost njegove izbire, s potrebo po pravilnosti in redu in z dodelitvijo namernosti elementom, v našem primeru kock (Piaget, Inhelder 1951). Veliko didaktikov matematike (Tenuta 1992; Barra 1992) ugovarja Piagetu, da otroci v predoperativnem in celo operativno-konkret-nem obdobju niso sposobni razumeti temeljnih konceptov verjetnosti. Piaget je to spoznal, ne da bi navedene vsebine vpeljeval z ustreznimi metodičnimi koraki. O sposobnosti razumevanja verjetnosti pri otrocih je pomembno, da ti večkrat ponovijo poskus pod enakimi pogoji, saj se bodo samo tako zavedali, da je mogoče formulirati napovedi, ki so verjetne in ki se zgodijo ali pa ne.

### *Primerjati verjetnosti*

Pojem verjetnosti se torej na začetku pri otroku razvija kot sposobnost obvladovanja naključnih dogodkov. Seveda ta razvoj temelji na izkušnji, saj bo otrok prav z izkušnjo najprej ločil med gotovim, naključnim in nemogočim dogodkom. Nato pa se bo začel zavedati, da so med naključnimi dogodki nekateri bolj verjetni, drugi manj verjetni ali pa enako verjetni. Otrok je tako vpeljan v kvalitativno ocenjevanje verjetnosti naključnega dogodka.

Če imamo vrečko, v kateri je 20 rdečih, 5 belih in 1 črna kroglica, obstajajo dogodki, ki so malo verjetni, ampak verjetni (izvleka črne kroglice) in zelo verjetni, ampak ne gotovi (izvleka rdeče kroglice). Nujno je torej učencem predlagati igre, ki dajejo možnost, da primerjajo take naključne dogodke, za katere je različno verjetno, da se bodo zgodili. To so, kot že vemo, igre s kockami, kartami, kovanci ... Otrok počasi in postopno razvija kriterije za postavljanje svojih hipotez, tako da poskus velikokrat ponovi pod enakimi pogoji. Poudariti moramo, da je pri takšnih dejavnostih (poskusih) poudarek na delu v skupinah (dogovarjanje, razdelitev dela, koordinacija v skupini, komuniciranje v skupini).

Otroke nato v osnovni šoli počasi vpeljujemo v statistično pojmovanje verjetnosti.

### *Statistično pojmovanje verjetnosti*

Učitelj naj na primer prinese v razred posodo in bombone (žetone, žogice ...) različnih barv. Učenci naj preštejejo bombone posameznih barv, preden jih dajo v posodo. Na podlagi vedenja, koliko bombonov neke barve je v posodi, naj učenci postavljajo hipoteze glede verjetnosti različnih dogodkov. Učitelj naj nato z učenci empirično preveri odgovore. Ne da bi gledal, naj vsak učenec izvleče iz posode bombon in izid zapiše v preglednico. Nato naj bombon vrne v posodo. Poskus naj učenci pod enakimi pogoji velikokrat (na primer stokrat) ponovijo. Učenci bodo z učiteljevo pomočjo ugotovili, da se pri nenehnem povečevanju števila poskusov relativna frekvenca dogodka čedalje bolj bliža nekemu številu. S tem številom merimo verjetnost dogodka. Seveda bodo učenci to ugotovitev povedali s svojimi besedami.

## Empirični del

### *Namen raziskave*

Poučevanje verjetnosti se v Sloveniji sistematično začne z začetkom šolanja, to je z vstopom v devetletno osnovno šolo. Kako je z razumevanjem matematičnega pojma verjetnosti v predšolskem obdobju in prvem razredu, je vprašanje, na katero smo skušali odgovoriti z izvedbo raziskave. Predvsem nas je zanimalo, ali so razlike v razumevanju temeljnih pojmov iz verjetnosti med otroki v vrtcih, starimi od 4 do 5 let (povprečna starost 4 leta 5 mesecev – skupina 1), otroki, starimi od 5 do 6 let (povprečna starost 5 let in 7 mesecev – skupina 2), in otroki v prvem razredu osnovne šole (povprečna starost 6 let in 5 mesecev – skupina 3).

### *Raziskovalna vprašanja*

1. Ali so med skupinami pri razumevanju pojma »zagotovo« statistično pomembne razlike?
2. Ali so med skupinami pri razumevanju pojma »nemogoče« statistično pomembne razlike?
3. Ali so med skupinami pri razumevanju pojma »mogoče« statistično pomembne razlike?

### *Metodološki postopek*

#### Vzorec

Vzorec je bil priložnosten, saj je bilo v raziskavo zajetih 70 predšolskih in 39 šolskih otrok iz obalnih vrtcev in šol. Ti otroci so prej obravnavali temeljne pojme iz verjetnosti po modelu, ki ga razvijamo avtorji. Otroke smo klasificirali v tri skupine glede na njihovo starost, in sicer smo v skupino 1 vključili 40 otrok, starih od 4 do 5 let (povprečna starost 4 leta in 5 mesecev). V skupino 2 smo vključili 30 otrok, starih od 5 do 6 let (povprečna starost 5 let in 7 mesecev). V skupino 3 smo vključili 39 otrok, starih od 6 do 7 let (povprečna starost 6 let in 5 mesecev).

#### Merilni pripomočki

Pri raziskavi smo uporabili tri naloge, s katerimi smo želeli odgovoriti na raziskovalna vprašanja in s tem preveriti razumevanje verjetnosti predšolskih otrok in otrok v prvem razredu osnovne šole, in sicer:

Prva naloga (prvo raziskovalno vprašanje): V neprosojni vrečki imaš le kocke modre barve. Izvlekel boš kocko, ne da bi gledal. Povej, kakšne barve bo izvlečena kocka.

Druga naloga (drugo raziskovalno vprašanje): V neprosojni vrečki imaš le kocke rdeče barve. Izvlekel boš kocko, ne da bi gledal. Ali je mogoče, da boš izvlekel modro kocko?

Tretja naloga (tretje raziskovalno vprašanje): V neprosojni vrečki imaš 4 rdeče in 1 modro kocko. Izvlekel boš kocko, ne da bi gledal. Povej, kakšne barve bo izvlečena kocka.

Za ugotavljanje razlik v razumevanju posameznih pojmov verjetnosti (zagotovo, nemogoče, mogoče) med otroki skupine 1 in skupine 2, med otroki skupine 2 in skupine 3 ter med otroki skupine 1 in skupine 3, smo pri vsaki nalogi uporabili  $\chi^2$ -test, pri čemer smo upoštevali, da so razlike statistično pomembne, če je  $p < 0,05$ . Pri  $\chi^2$ -testu smo zaradi dimenzij kontingenčnih tabel (2 x 2) upoštevali Yatesov popravek.

Za ugotavljanje razlik v razumevanju osnovnih konceptov verjetnosti nasploh med otroki skupine 1 in skupine 2, med otroki skupine 2 in skupine 3 ter med otroki skupine 1 in skupine 3 smo upoštevali odgovore otrok v vseh treh nalogah. Uporabili smo t-test, pri tem smo upoštevali, da so razlike statistično pomembne, če je  $p < 0,05$ .

### Postopek

Izvedli smo raziskavo, in sicer v štirih skupinah otrok, starih od 4 do 6 let, in v dveh prvih razredih osnovne šole. Otrokom smo individualno ustno postavili tri naloge, s katerimi smo preverili njihovo znanje o verjetnosti. Naloge, ki smo jih otrokom postavljali, so si sledile od lažje k težji. Preverjali smo, ali so otroci sposobni predvidevanja. Otrokom nismo postavili časovne omejitve. Podatke smo pridobili tako, da smo čas raziskovanja prilagodili posameznim otrokovim potrebam. Vsak pravilni odgovor smo točkovali z 1 točko. Primerjali smo odstotke pravih rešitev posamezne naloge. Nato smo sešteli točke posameznih nalog in s t-testom primerjali povprečno število pravih odgovorov med skupino 1 in skupino 2, med skupino 2 in skupino 3 ter med skupino 1 in skupino 3.

### Rezultati in interpretacija

Rezultate smo dobili tako, da smo pri vseh skupinah prešteli število pravih odgovorov, ki so jih otroci dali pri reševanju nalog iz verjetnosti. Dobljene rezultate navajamo v nadaljevanju.

1. Ali so med skupinami pri razumevanju pojma »zagotovo« statistično pomembne razlike?

Raziskovalno vprašanje smo preverjali z nalogo: *V neprosojni vrečki imaš le kocke modre barve. Izvlekel boš kocko, ne da bi gledal. Povej, kakšne barve bo izvlečena kocka.*

80 % otrok iz skupine 1 je pravilno predvidevalo, da bodo iz vrečke izvlekli modro kocko, saj so odgovarjali:

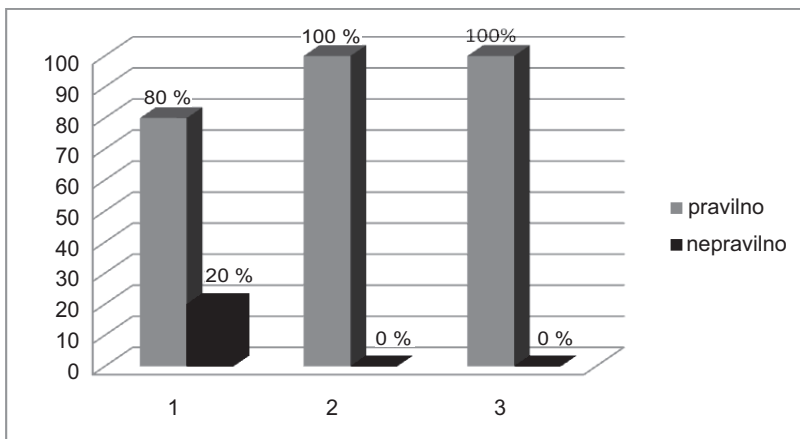
- potegnil bom modro kocko, ker so v vrečki samo modre kocke;
- »zagotovo« bom potegnil modro;
- vse so modre ipd.

20 % otrok iz te skupine tega predvidevanja ni bila zmožna. Ti otroci najpogosteje niso odgovorili, ali so nebesedno, ali besedno izrazili svojo neopredeljenost,

na primer:

- ne vem;
- najprej bom izvlekel kocko, nato bom povedal, kakšne barve je.

Vsi otroci skupine 2 in skupine 3 so pravilno predvidevali, da bodo iz neprosojne vrečke, v kateri so bile samo modre kocke, izvlekli modro kocko. Še več, nekateri izmed teh so celo uporabili pojem zagotovo, ko smo jih vprašali, ali bodo v vsakem primeru izvlekli modro kocko. Poleg tega pa so ti otroci povedali, da ni nikakršne možnosti, da bi izvlekli kocko katere koli druge barve.



Slika 2: Odstotek pravih odgovorov otrok v skupinah 1, 2 in 3 pri prvi nalogi

Pri reševanju prve naloge so bile med skupino 1 in skupino 2 statistično pomembne razlike ( $\chi^2 = 4,942$ ,  $p = 0,026$ ), tako kot tudi med skupino 1 in skupino 3 ( $\chi^2 = 6,620$ ,  $p = 0,010$ ). Med skupino 2 in skupino 3 ni bilo razlik.

Čeprav so bile med skupino 1 in skupino 2 ter med skupino 1 in skupino 3 statistično pomembne razlike, je večina otrok, starih od 4 do 5 let, razumela pojem »zagotovo«.

2. Ali so med skupinami pri razumevanju pojma »nemogoče« statistično pomembne razlike?

Raziskovalno vprašanje smo preverjali z nalogo: *V neprosojni vrečki imaš le kocke rdeče barve. Izvlekel boš kocko, ne da bi gledal. Ali je mogoče, da boš izvlekel modro kocko?*

Pričakovali smo, da bomo dobili enake rezultate kot pri prvi nalogi, vendar smo s presenečenjem ugotovili, da ni bilo tako. Rezultati pri otrocih skupine 1 so ostali enaki: otroci, ki so pravilno odgovorili na vprašanje v prvi nalogi, so pravilno odgovorili tudi na vprašanje v drugi nalogi, na primer:

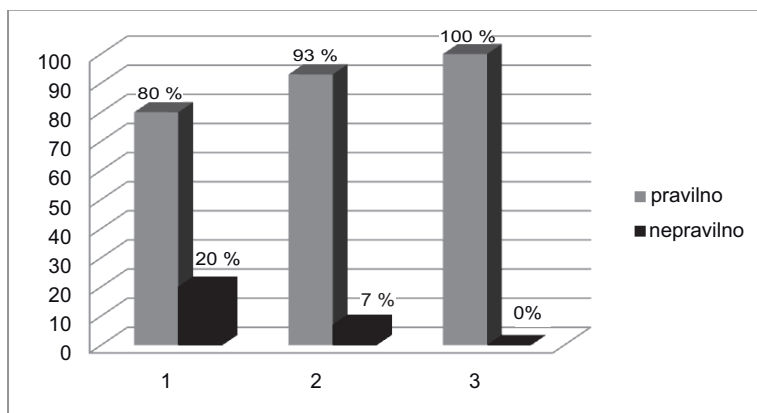
- ne morem izvleči modre kocke, ker so v vrečki le rdeče;
- vem, da so v vrečki samo rdeče kocke, zato ne bom izvlekel modre;
- vedno bom izvlekel rdečo kocko.

Otroci iz skupine 1, ki so napačno odgovorili na vprašanje prve naloge, so napačno odgovorili tudi na vprašanje druge naloge, na primer:

- ne vem;
- ko bom izvlekel kocko, bom videl, ali je modra.

V skupini 2 se je 7 % otrok napačno odločilo oziroma napačno predvidevalo, katero kocko bodo izvlekli iz neprosojne vrečke, v kateri so bile samo rdeče kocke, in s tem tudi napačno odgovorilo na zastavljeno vprašanje. Njihovi odgovori so bili podobni odgovorom otrok iz prve skupine, namreč da bodo šele potem, ko bodo izvlekli kocko, videli, kakšne barve je.

Vsi otroci skupine 3 so pravilno predvidevali, da bodo iz neprosojne vrečke, v kateri so bile samo rdeče kocke, izvlekli rdečo kocko. Nekateri od teh otrok so uporabili pojem »nemogoče« in s tem potrdili tezo, da iz vrečke, v kateri so same rdeče kocke, ni mogoče izvleči kocke modre barve.



Slika 3: Odstotek pravih odgovorov otrok v skupinah 1, 2 in 3 pri drugi nalogi

Pri reševanju druge naloge ni bilo statistično pomembnih razlik med skupino 1 in skupino 2 ( $\chi^2 = 1,519$ ,  $p = 0,218$ ), tako kot ni bilo statistično pomembnih razlik med skupino 2 in skupino 3 ( $\chi^2 = 0,833$ ,  $p = 0,361$ ), so pa bile statistično pomembne razlike med skupino 1 in skupino 3 ( $\chi^2 = 6,620$ ,  $p = 0,010$ ).

Čeprav ni bilo statistično pomembnih razlik med skupino 1 in skupino 2 ter med skupino 2 in skupino 3, pa se iz odstotkov pravih rešenih nalog vidi, da so bili otroci v prvem razredu, stari od 6 do 7 let, najuspešnejši.

3. Ali so med skupinami pri razumevanju pojma »mogoče« statistično pomembne razlike?

Raziskovalno vprašanje smo preverjali z nalogo: *V neprosojni vrečki imaš 4 rdeče in 1 modro kocko. Izvlekel boš kocko, ne da bi gledal. Povej, kakšne barve bo izvlečena kocka.*

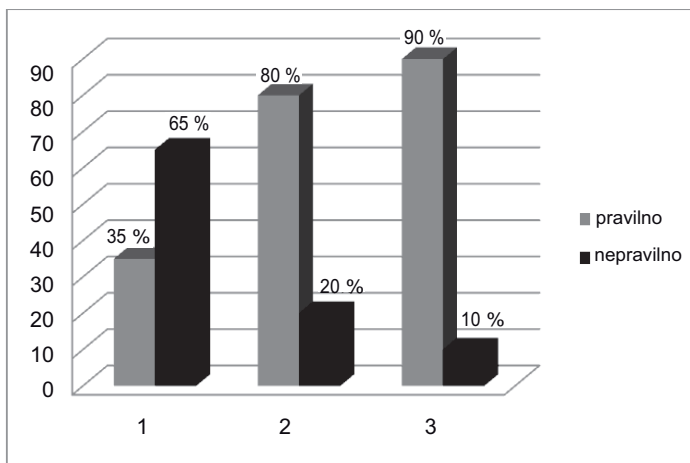
Ugotovili smo, da je v skupini 1 le 35 % otrok pravilno predvidevalo, da bodo iz vrečke izvlekli mogoče rdečo ali mogoče modro kocko, odgovarjali so na primer:

- ne vem, lahko izvlečem modro ali pa rdečo;
- kocka bo morda rdeča, morda modra, ne vem, katero bom zgrabil.

Večina otrok (65 %), ki so napravili napako v predvidevanju, je pri podajanju rešitve ugibala, saj so se odločili po navadi za kocko tiste barve, ki jim je bila bolj všeč. Večkrat se je tudi zgodilo, da so se odločili za kocko neke barve in so na vprašanje, zakaj mislijo, da bodo izvlekli kocko »te« barve, odgovorili: »Ne vem.«

Iz dobljenih podatkov lahko razberemo, da so otroci v skupini 2 nalogo bolj reševali, saj je 80 % vprašanih otrok pravilno predvidelo, da bodo iz neprosojne vrečke, v kateri so bile rdeče in modra kocka, izvlekli rdečo ali modro kocko in pri tem pripominjali, da ne morejo vnaprej povedati, kakšne barve bo izvlečena kocka. 20 % otrok skupine 2 ni bilo zmožno tega predvidevanja, njihovi odgovori so bili povezani z barvo, ki jim je bila bolj všeč, tako kot odgovori otrok skupine 1, ki so napačno predvidevali.

Vsi otroci skupine 3 so pravilno predvidevali, da bodo iz neprosojne vrečke, v kateri so bile rdeče in modra kocka, izvlekli rdečo ali modro kocko, ter pravilno ugotavljali, da ne morejo vnaprej povedati, kakšne barve bo izvlečena kocka. Nekateri otroci so celo sklepali, da je bolj verjetno, da izvlečejo rdečo kocko, ker je bilo več kock rdečih. Poleg omenjenega so bili otroci skupine 3 zmožni predvidevanja, da obstaja manjša verjetnost, da bi iz vrečke izvlekli modro kocko, to se je nekajkrat tudi zgodilo.



Slika 4: Odstotek pravih odgovorov otrok v skupinah 1, 2 in 3 pri tretji nalogi

Tudi pri reševanju tretje naloge so bile med skupino 1 in skupino 2 statistično pomembne razlike ( $\chi^2 = 12,234$ ,  $p = 0,000$ ), med skupino 2 in skupino 3 ni bilo statistično pomembnih razlik ( $\chi^2 = 0,632$ ,  $p = 0,427$ ), statistično pomembne razlike so bile tudi med skupino 1 in skupino 3 ( $\chi^2 = 22,854$ ,  $p = 0,000$ ).

Iz rezultatov sklepamo, da večina otrok, starih od 4 do 5 let, ni sposobna razumeti pojma »mogoče«. Večina otrok, starih od 5 do 7 let, pravilno uporablja pojem »mogoče«. Še več, nekateri otroci iz skupine 3 so pri podajanju odgovorov pravilno predvideli, kocko katere barve bodo izvlekli iz neprosojne vrečke, poleg tega pa so napovedali, da tak žreb ni nujen, ker obstaja tudi majhna možnost, da izvlečejo kocko druge barve, ki je bila edina v vrečki. Torej so svojo napoved še podkrepili in verjetnosti tudi primerjali.

Na koncu smo s t-testom ugotavljali, ali so med skupinami otrok statistično pomembne razlike glede razumevanja verjetnosti nasploh, in sicer z upoštevanjem odgovorov pri vseh treh nalogah. Ugotovili smo, da so med skupino 1, v kateri je povprečna starost otrok 4 leta in 5 mesecev, in med skupino 2, v kateri je povprečna starost otrok 5 let in 7 mesecev, statistično pomembne razlike. Statistično pomembne razlike so tudi med skupino 1 in skupino 3, v kateri je povprečna starost otrok 6 let 5 mesecev ( $t = -5,795$ ,  $p = 0,000$ ), ni pa statistično pomembnih razlik med skupino 2 in skupino 3 ( $t = -1,399$ ,  $p = 0,169$ ). Tako lahko sklepamo, da gre za starostno mejo v dojetanju verjetnosti, ki se pokaže okoli 5. leta starosti. Takrat je večina otrok sposobna predvidevanja naključnega dogodka, pred petim letom pa nekateri otroci tega še ne zmorejo. Sprejetje negotovosti otrokom ne povzroča nikakršnih težav, tega so zmožni tudi otroci pri štirih letih. To smo zaznali ob uvajanju prvega metodičnega koraka, ki smo ga izvajali z otroki pred drugim korakom predvsem z igrami na srečo. Oba koraka sta bila izpeljana pred raziskavo.

	Starostni skupini	n	Aritm. sredina	Standardni odklon	Standard. napaka aritm. sredine	Levenejev preizkus o homogenosti varianc		t	Statistična pomembnost p
						F	p		
Skupaj	skupina 1	40	1,95	0,985	0,155	3,142	0,081	-3,870	0,000
	skupina 2	30	2,73	0,583	0,106				

Preglednica 1: Prikaz razlik v povprečju števila pravih odgovorov med otroci skupine 1 in otroci skupine 2

	Starostni skupini	n	Aritm. sredina	Standardni odklon	Standard. napaka aritm. sredine	Levenejev preizkus o homogenosti varianc		t	Statistična pomembnost p
						F	p		
Skupaj	skupina 2	30	2,73	0,583	0,106	10,018	0,002	-1,399	0,169
	skupina 3	39	2,89	0,307	0,049				

Preglednica 2: Prikaz razlik v povprečju števila pravih odgovorov med otroci skupine 2 in otroci skupine 3

	Starostni skupini	n	Aritm. sredina	Standardni odklon	Standard. napaka aritm. sredine	Levenejev preizkus o homogenosti varianc		t	Statistična pomembnost P
						F	p		
Skupaj	skupina 1	40	1,95	0,985	0,155	17,254	0,000	- 5,795	0,000
	skupina 3	39	2,89	0,307	0,049				

*Preglednica 3: Prikaz razlik v povprečju števila pravih odgovorov med otroci skupine 1 in otroci skupine 3*

## Sklep

Z raziskavo smo odgovorili na zastavljena raziskovalna vprašanja ter prišli do sklepa, da morajo biti koncepti verjetnosti vpeljani že v predšolskem obdobju, ne pa šele v osnovni ali celo v srednji šoli. Uvajanje matematične definicije verjetnosti kot razmerja med številom ugodnih in številom vseh elementarnih dogodkov v poskusu je namreč v poznih letih osnovnošolskega izobraževanja ali v srednji šoli zelo zahtevno, če ga otroci ne morejo opreti na svoje izkušnje. Izkušnje lahko pridobijo v predšolskem obdobju in v začetnih letih šolanja, ko postopoma, po usvojitvi pojmov »zagotovo«, »mogoče« in »nemogoče«, oblikujejo empirično pojmovanje verjetnosti kot podlago za razumevanje matematične verjetnosti.

Čeprav bi morali verjetnost vpeljevati že v predšolskem in zgodnješolskem obdobju, saj je to izpostavljeno tako v Kurikulumu za vrtce (1999) kot tudi v Učnem načrtu za matematiko (2002), se mnogi vzgojitelji in učitelji tega izogibajo (Cotič, Felda 2009). Večinoma gre za strah pred vsebino, o kateri nimajo jasnih predstav, saj so jo spoznali zgolj na abstraktni ravni prek bolj ali manj zapletenih formul, katerih vsebine si ne znajo predstavljati v konkretni življenjski situaciji.

Če hočemo, da bo človek razvil razmišljanje, ki se bistveno razlikuje od determinističnih shem, moramo začeti učiti verjetnost v predoperativnem ali najpozneje v operativno-konkretnem obdobju. V vrtcu pri verjetnosti izhajamo iz subjektivne verjetnosti. O subjektivnem doživljanju verjetnosti je treba z otroki govoriti ter uskladiti opisne načine njenega izražanja. Pri pouku matematike v prvem triletju morajo učenci z reflektiranimi izkušnjami spoznati, da tudi za naključne pojave veljajo določene zakonitosti. Tako preidemo na empirično pojmovanje verjetnosti.

V poznejših letih šolanja naj bi se učenci počasi in postopoma srečali že z nekoliko zahtevnejšimi ocenami verjetnosti, kjer moramo najprej sistematično rešiti kombinatorični problem, da lahko na podlagi analize kombinatoričnih prikazov napovemo izid oziroma izpeljemo elementarno oceno verjetnosti, ki že vodi h klasični definiciji verjetnosti. Učenec tako počasi, vendar progresivno, spoznava preproste zakonitosti iz sveta verjetnosti, ki se mu je zdel na začetku popolnoma nepredvidljiv in celo negotov. Pri učenju in poučevanju verjetnosti se moramo zavedati, da je pojem verjetnosti v matematiki vedno zavzemal posebno mesto, saj je zelo težko opredeljiv s strogostjo, ki jo zahtevajo druge matematične

discipline. Celo veliki matematik Laplace je o verjetnosti zapisal: »Zares je neverjetno, da je disciplina, katere korenine izhajajo iz proučevanja hazarda oziroma iger na srečo, postala ena najpomembnejših matematičnih disciplin.«

## Literatura

- Bahovec, E. D., Kranjc, S., Cvetko, I., Marjanovič Umek, L., Videmšek, M. (1999). Kurikulum za vrtce: predšolska vzgoja v vrtcih. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo.
- Barra, M. et al. (1992). The Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trends. Progetto strategico del C. N. R. Tecnologie ed Innovazioni Didattiche 12.
- Cotič, M. (1998). Uvajanje vsebin iz statistike, verjetnosti in kombinatorike ter razširitev matematičnega problema na razrednem pouku matematike (Introducing issues from statistics, probability, and combinatorics and expanding of mathematical problem in lower primary school). Ljubljana: Filozofska fakulteta.
- Cotič, M., Felda, D. (2009). Through games into the world of probability. V: *Mathematics and Children*. Pavlekovič, M. (ur.). Osijek: Josip Juraj Strossmayer University of Osijek.
- Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, Holland: D. Riedel.
- Fischbein, E. (1984). L'insegnamento della probabilità nella scuola elementare. V: *Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare*. Prodi, G. (ur.). Editrice La Scuola, Brescia: Editrice La Scuola, str. 35–48.
- Fischbein, E. (1985). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. V: *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Chini Artusi, L. (ur.). Bologna: Umi-Zanichelli.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1951). *La genese de l'idee de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.
- Tenuta (1992). *Itinerari di logica, probabilità, statistica, informatica*, Brescia: Editrice La Scuola.
- Tomšič, G., Cotič, M., Magajna, Z., Žakelj, A. (2002). Učni načrt: program osnovnošolskega izobraževanja, Matematika. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport: Zavod RS za šolstvo.
- Valenti, E. (1987). *La matematica nella nuova scuola elementare*. Firenze: Le Monnier.
- Unesco (1972). *Tendenze attuali dell'insegnamento della matematica*. Torino: SEI.

Mara COTIČ, Ph.D., Lea KOZEL, Darjo FELDA, M.A. (University of Primorska, Slovenia)

### **UNDERSTANDING THE MATHEMATICAL CONCEPT OF PROBABILITY WITH CHILDREN IN KINDERGARTEN AND IN THE FIRST GRADE OF PRIMARY SCHOOL**

**Abstract:** In the kindergarten curriculum and in the Curriculum for mathematics in primary schools, the concept of probability is particularly emphasized. It enables children to develop, besides deterministic, also nondeterministic thinking, which is imperative of understanding the contemporary world. The child encounters some basic concepts of probability already in its pre-school period, especially in games of chance. The question is how children cope with them and how they understand them. We tried to find the answer, conducting the research in kindergartens and schools. We were particularly interested if there were any differences in solving probability problems between pre-school children and first grade children in primary school, especially in the exercises referring to the prediction of random events.

**Key words:** kindergarten, first grade of primary school, probability possible, impossible, certain.